ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN BÌNH THẠNH – (2014-2015)

Thời gian: 150 phút

Bài 1: (4 điểm) Cho biểu thức: $P=\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right)$ với $x\geq 0; x\neq 4$

a) Rút gọn.

b) Tìm $x\in Z$ để $\sqrt{x}-P\in Z$

Bài 2: (5 điểm) Giải phương trình:

a) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$

b) $x^2+4x=2\sqrt{2x+3}-5$

c) $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$

Bài 3: (4 điểm)

a) Chứng minh: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}$

b) Cho ba số a, b, c dương thỏa $a+b+c=1$

Chứng minh: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}+6\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}+\sqrt{\dfrac{1-b}{b}}+\sqrt{\dfrac{1-c}{c}}\right)$

Bài 4: (2 điểm)

a) Cho $a+b+c=0$. Chứng minh: $a^3+b^3+c^3=3abc$

b) Cho $x,y,z\neq 0$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$. Tính: $\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{xz}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}$

Bài 5: (3,5 điểm)

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). OA cắt BC tại H. Vẽ đường kính BD, AD cắt (O) tại E (E khác D) và cắt BC tại I.

a) Chứng minh: $AHE = ADO$

b) Chứng minh: $HE\perp CE$

Bài 6: (1,5 điểm) Cho ΔABC nhọn (AB < AC). Đường tròn tâm I đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F và E. Hai tia BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng qua H vuông góc với IH cắt AB, AC tại P, Q.

a) Chứng minh: $\Delta AHQ \backsim \Delta BIH$

b) Chứng minh: H là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

HẾT

ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN BÌNH THẠNH – (2014-2015)
HƯỚNG DẪN

Bài 1: (4 điểm) Cho biểu thức: $P=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right)$ với $x\ge 0;x\ne 4$

a) Rút gọn.

$$P=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right)$$

$$\Leftrightarrow P=\left(\frac{\sqrt{x}+3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right):\left[-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}-\frac{9-x}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow P=\left(\frac{3}{\sqrt{x}+3}\right):\left[\frac{-\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2-9+x}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow P=\left(\frac{3}{\sqrt{x}+3}\right):\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\left(\frac{3}{\sqrt{x}+3}\right):\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)}=\left(\frac{3}{\sqrt{x}+3}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{3}{\sqrt{x}-2}$$

b) Tìm $x\in Z$ để $\sqrt{x}-P\in Z$

Đặt $M=\sqrt{x}-P$

TH1: $\sqrt{x}$ là số nguyên.

Để $M\in Z$ thì $3\,\vdots\left(\sqrt{x}-2\right)\Rightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\in Ư\left(3\right)$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\in\left\{-1;1;3\right\}\quad\left(\text{vì}\sqrt{x}-2\ge -2\right)$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}\in\left\{1;3;5\right\}\Leftrightarrow x\in\left\{1;9;25\right\}$$

TH2: $\sqrt{x}$ là số vô tỉ.

Khi đó: $M=\sqrt{x}-P=\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}-2}=\frac{x-2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}$

$$\Rightarrow M\left(\sqrt{x}-2\right)=x-2\sqrt{x}-3$$

$$\Rightarrow M\sqrt{x}-2M=x-2\sqrt{x}-3$$

$$\Rightarrow\left(M+2\right)\sqrt{x}=x+2M-3$$

Nếu $M\ne -2$ thì $\sqrt{x}=\frac{x+2M-3}{M+2}\in Q$ (vô lí)

$$\Rightarrow M=-2\Rightarrow x+2M-3=0\Leftrightarrow x-4-3=0\Leftrightarrow x=7$$

Thử lại, thế x = 7 vào $M=\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}$, ta được:

$$M=\sqrt{7}-\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\sqrt{7}-\frac{3\left(\sqrt{7}+2\right)}{\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)}=\sqrt{7}-\left(\sqrt{7}+2\right)=-2\in Z\Rightarrow \text{ nhận } x=7$$

Vậy $x\in\{1;7;9;25\}$ thì $\sqrt{x}-P\in Z$

<u>Bà 2:</u> (5 điểm) Giải phương trình:

a) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}\right)^3=2^3$$

$$\Leftrightarrow\left(x+1\right)+\left(7-x\right)+3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{7-x}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}\right)=8\Leftrightarrow 8+3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{7-x}.2=8$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{7-x}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\7-x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=7\end{array}\right.\quad \text{Vậy } S=\{-1;7\}$$

b) $x^2+4x=2\sqrt{2x+3}-5$

Điều kiện: $x\ge-\dfrac{3}{2}$

$$x^2+4x=2\sqrt{2x+3}-5\Leftrightarrow x^2+2x+1+\left(2x+3\right)-2\sqrt{2x+3}+1=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(\sqrt{2x+3}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=0\\\sqrt{2x+3}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1\ (\text{nhận})\qquad \text{Vậy } S=\{-1\}$$

c) $\left(6x+5\right)^2\left(3x+2\right)\left(x+1\right)=35$

$$\left(6x+5\right)^2\left(3x+2\right)\left(x+1\right)=35$$
$$\Leftrightarrow\left(6x+5\right)^2\left(6x+4\right)\left(6x+6\right)=420$$
$$\Leftrightarrow\left(36x^2+60x+25\right)\left(36x^2+60x+24\right)=420$$

Đặt $t=36x^2+60x+24$, phương trình trở thành:

$$\left(t+1\right)t=420\Leftrightarrow t^2+t-420=0\Leftrightarrow t^2+21t-20t-210=0\Leftrightarrow\left(t+21\right)\left(t-20\right)=0$$

TH1: $t+21=0\Rightarrow 36x^2+60x+24+21=0\Leftrightarrow 36x^2+60x+45=0\Leftrightarrow 12x^2+20x+9=0$ **(vônghiệm)**

TH2: $t-20=0\Rightarrow 36x^2+60x+24-20=0\Leftrightarrow 36x^2+60x+4=0\Leftrightarrow 9x^2+15x+1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-5+\sqrt{21}}{6}\\x=\dfrac{-5-\sqrt{21}}{6}\end{array}\right.\qquad \text{Vậy } S=\left\{\frac{-5+\sqrt{21}}{6};\frac{-5-\sqrt{21}}{6}\right\}$$

<u>Bài 3:</u> (4 điểm)

a) Chứng minh: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{\left(a+c\right)^2+\left(b+d\right)^2}$ **. Tìm giá trị nhỏ nhất của:**

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}$

Ta có: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ **(1)**

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right)^2\ge(a+c)^2+(b+d)^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}+c^2+d^2\ge a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2$

$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\ge ac+bd$ (2)

TH1: $ac+bd<0$ **thì (2) luôn đúng** $\Rightarrow$ **(1) đúng.**

TH2: $ac+bd\ge0$**, khi đó (2) trở thành:**

$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\ge a^2c^2+2adbc+b^2d^2$

$\Leftrightarrow a^2d^2+b^2c^2\ge 2adbc$

$\Leftrightarrow(ad-bc)^2\ge0$ **(bất đẳng thức đúng)**

Vậy $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$**. Dấu ''='' xảy ra khi ad = bc**

Ta có: $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{x^2+1^2}+\sqrt{(1-x)^2+2^2}$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$\left[\sqrt{x^2+1^2}+\sqrt{(1-x)^2+2^2}\right]^2\ge(x+1-x)^2+(1+2)^2$

$\Leftrightarrow\left[\sqrt{x^2+1^2}+\sqrt{(1-x)^2+2^2}\right]^2\ge1+9$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1^2}+\sqrt{(1-x)^2+2^2}\ge\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}\ge\sqrt{10}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}$ **là** $\sqrt{10}$

Dấu ''='' xảy ra khi $2x=1(1-x)\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

b) Cho ba số a, b, c dương thỏa $a+b+c=1$

Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+6\ge2\sqrt2\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương, ta có:

$$\begin{cases}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+2\ge2\sqrt{\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\cdot2}=2\sqrt2\sqrt{\frac{b+c}{a}}\\ \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+2\ge2\sqrt{\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)\cdot2}=2\sqrt2\sqrt{\frac{a+c}{b}}\\ \left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)+2\ge2\sqrt{\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)\cdot2}=2\sqrt2\sqrt{\frac{b+a}{c}}\end{cases}$$

$\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+6\ge2\sqrt2\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{a+c}{b}}+\sqrt{\frac{b+a}{c}}\right)$

Mà a + b + c = 1

Nên $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+6\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right)$

Bài 4: (2 điểm)

a) Cho $a+b+c=0$. Chứng minh: $a^3+b^3+c^3=3abc$

Ta có: $a+b+c=0 \Leftrightarrow a+b=-c \Leftrightarrow (a+b)^3=(-c)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(-c)=-c^3 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

b) Cho $x,y,z\ne 0$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Tính: $\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{xy}{z^2}$

$$\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=\frac{xyz}{x^3}+\frac{xyz}{y^3}+\frac{xyz}{z^3}=xyz\left[\left(\frac{1}{x}\right)^3+\left(\frac{1}{y}\right)^3+\left(\frac{1}{z}\right)^3\right]$$

Áp dụng câu a) ta có: $\left(\frac{1}{x}\right)^3+\left(\frac{1}{y}\right)^3+\left(\frac{1}{z}\right)^3=3\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}\right)$ với $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

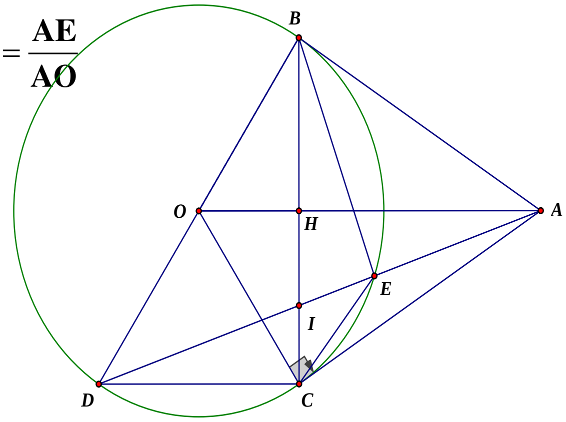
Do đó: $\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=xyz.3\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}\right)=3$

Bài 5: (3,5 điểm)

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). OA cắt BC tại H. Vẽ đường kính BD, AD cắt (O) tại E (E khác D) và cắt BC tại I.

a) Chứng minh: $AHE = ADO$.

Ta có : $\begin{cases} AB^2=AH.AO\ (HTL)\\ AB^2=AE.AD\ (HTL)\end{cases} \Rightarrow AH.AO=AE.AD \Rightarrow \frac{AH}{AD}=\frac{AE}{AO}$



Xét ΔAHE và ΔADO, ta có: $\begin{cases} HAE=DAO\ (\text{góc chung})\\ \frac{AH}{AD}=\frac{AE}{AO}\ (\text{cmt})\end{cases}$

$\Rightarrow \Delta AHE \backsim \Delta ADO (c-g-c) \Rightarrow AHE=ADO$

b) Chứng minh: $HE\perp CE$

Xét ΔICD và ΔIEB, ta có: $\begin{cases} CID=EIB\ (\text{2 góc đối đỉnh})\\ ICD=IEB\ (=90^0)\end{cases} \Rightarrow \Delta ICD \backsim \Delta IEB\ (g-g)$

$\Rightarrow \frac{IC}{IE}=\frac{ID}{IB}(\text{tsđd}) \Rightarrow \frac{IC}{ID}=\frac{IE}{IB}$

Xét ΔICE và ΔIDB, ta có: $\begin{cases} CIE = BID\ (2\text{ góc đối đỉnh}) \\ \dfrac{IC}{ID} = \dfrac{IE}{IB}\ (cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta ICE \backsim \Delta IDB\ (g-g)$

$\Rightarrow ICE = IDB \Rightarrow HCE = ADO$

mà $AHE = ADO$ (cm câu a) nên $AHE = HCE$

Mặt khác: $AHE + CHE = 90^0 (...)$ nên $HCE + CHE = 90^0, ... \Rightarrow HEC = 90^0 \Rightarrow HE \perp CE$

Bài 6: (1,5 điểm) Cho ΔABC nhọn (AB < AC). Đường tròn tâm I đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F và E. Hai tia BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng qua H vuông góc với IH cắt AB, AC tại P, Q

b) Chứng minh: $\Delta AHQ \backsim \Delta BIH$

Ta có: $\begin{cases} EHQ + QHI + IHB = 180^0 \\ QHI = 90^0\ (PQ \perp HI \text{ tại } H) \end{cases} \Rightarrow EHQ + IHB = 90^0$

mà $EHQ + EQH = 90^0\ (\Delta EHQ \text{ vuông tại } E)$ nên $EQH = BHI \Rightarrow AQH = BHI$

Xét ΔAHQ và ΔBIH, ta có:

$\begin{cases} AQH = BHI (cmt) \\ HAQ = HBI (\text{cùng phụ } ACB) \end{cases} \Rightarrow \Delta AHQ \backsim \Delta BIH (g-g)$

c) Chứng minh: H là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Ta có:

$\begin{cases} AHP + AHQ = 180^0\ (2\text{ góc kề bù}) \\ HIC + HIB = 180^0\ \ (2\text{ góc kề bù}) \\ AHQ = HIB (\Delta AHQ \backsim \Delta BIH) \end{cases} \Rightarrow AHP = HIC$

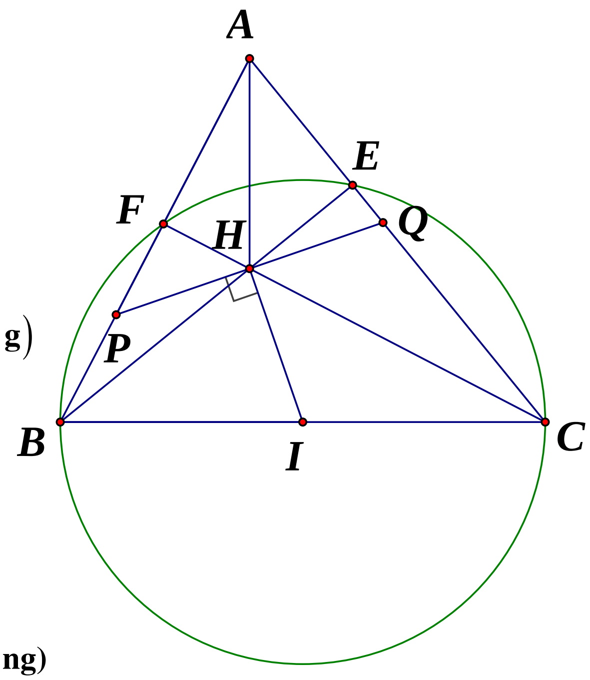
Xét ΔAHP và ΔCIH, ta có:

$\begin{cases} AHP = HIC (cmt) \\ HAP = HCI (\text{cùng phụ } ABC) \end{cases} \Rightarrow \Delta AHP \backsim \Delta CIH (g-g)$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{HP}{CI} = \dfrac{AH}{IH} (\Delta AHP \backsim \Delta CIH) \\ \dfrac{HQ}{BI} = \dfrac{AH}{IH} (\Delta AHQ \backsim \Delta BIH) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{HP}{CI} = \dfrac{HQ}{BI}$

mà CI = BI nên HP = HQ

Suy ra H là trung điểm của PQ (vì P, H, Q thẳng hàng)



❀ ❀ HẾT ❀ ❀